Résolution d'Exercices en Transport Optimal

Exercice 1

On cherche l'application de transport optimale T qui envoie μ, la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, vers ν, définie par :

$$\int_{[0,1]} f(y)\nu(dy) = (1-\alpha)\int_0^1 f(y)dy + \alpha f(1), \quad \forall f \in C(\mathbb{R}),$$

avec $\alpha \in [0, 1]$.

Étapes de la résolution :

1) **Caractérisation de ν:**
   - Si $\alpha = 0$, $\nu = \mu$ (mesure uniforme sur $[0, 1]$).
   - Si $\alpha = 1$, ν est une Dirac en $y = 1$.
   - Si $0 < \alpha < 1$, ν est une combinaison convexe de la mesure uniforme et d'une Dirac.

2) **Forme du transport optimal T:** Le transport optimal correspond au cas où ν conserve la masse de μ, donc on doit résoudre $T_{\#}\mu = \nu$, ce qui implique :

$$\int_0^{T(x)} \nu(dy) = \int_0^x \mu(dx) = x.$$

3) **Calcul explicite de T:**

$$\nu(dy) = (1-\alpha)dy + \alpha\delta_1(dy).$$

   En résolvant l'équation ci-dessus, on trouve :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\alpha}, & \text{si } x \leq 1-\alpha, \\ 1, & \text{si } x > 1-\alpha. \end{cases}$$

4) **Conditions de régularité :**
   - T est une fonction **lisse** si $\alpha = 0$ (aucune discontinuité).
   - T est une fonction **bijective** si $\alpha < 1$.

Exercice 2

On considère μ, la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^2$, et une transformation :

$$T(x,y) = \left(\sqrt{x}\cos(2n\pi y), \sqrt{x}\sin(2n\pi y)\right), \quad n \in \{0,1,2\}.$$

Étapes de la résolution :

1) **Image de μ par T:**

   - T transforme un carré en un disque unité.
   - En passant aux coordonnées polaires, avec $x = r^2$ et y contrôlant l'angle :

   $$\nu(d(r,\theta)) = \mu(dx, dy) = dx\, dy = 2r\, dr\, d\theta, \quad r \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi].$$

   - ν est donc la mesure uniforme sur le disque unité.

2) **Conditions d'optimalité :**

   - Pour que T soit un transport optimal, il doit être le **gradient d'une fonction convexe** (d'après Brenier).
   - Ceci est vrai si $n = 1$ (rotation simple, mouvement monotone).
   - Si $n > 1$, T n'est pas monotone (chevauchement des trajectoires angulaires).

3) **Mesure absolument continue :**

   - ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dans le disque, car la densité $2r$ est positive partout pour $n = 1$.

Problème

Question 1

En utilisant le théorème de dualité de Rockafellar, on doit montrer l'existence de mesures (c, m) satisfaisant les relations données.
Idées-clés pour la solution :

- Le théorème de dualité garantit l'existence de mesures duales lorsque le problème primal est convexe.
- En reformulant la contrainte :

  $$\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla_x \phi|^2 \leq \theta,$$

  cela mène à l'introduction de (c, m), où $m = vc$, et v est une densité L^2 par rapport à c.
- Les relations de dualité deviennent :

  $$J = \int_Q \frac{1}{2}|v|^2 dc + K^*[c],$$

  $$\int_Q (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f) dc = B_T(f).$$

Question 2

Avec des solutions supposées régulières ($c = \gamma(t,x)dxdt$), les équations dynamiques deviennent :

$$\partial_t \gamma + \nabla_x \cdot (\gamma v) = 0,$$
$$\partial_t v + (v \cdot \nabla_x)v = E(t,x).$$

Ces relations découlent des conditions d'optimalité et de la conservation de la masse. L'unicité de E dépend des conditions aux bords et de la régularité des solutions.

Question 3

Avec $K(\theta) = \int_Q \exp(\theta) dtdx$, la relation entre θ et γ est donnée par :

$$\theta(t,x) = \lambda(\gamma(t,x)),$$

avec $\lambda(z) = \log(z)$ obtenue par la dualité entre K et K^*. Cela impose l'unicité de (γ, v) sous des hypothèses de régularité.